Projektionen mit Normbedingungen in reellen Banachräumen

Inaugural - Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Richard Evans

aus Gorseinon, Wales

1974

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546513_0108

Projektionen mit Normbedingungen in reellen Banachräumen

Inaugural - Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Richard Evans

aus Gorseinon, Wales

Berichter: Professor Dr. P a c h a l e
Professor Dr. B e h r e n d s

Tag der mündlichen Prüfung : 10. 12. 74

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

ZUSAMMENFASSUNG

Es werden Projektionen in Banachräumen untersucht, die den Raum so zerlegen, daß die Norm eines Elementes nur von den Normen der zerlegten Komponenten abhängt. Es wird gezeigt, daß nicht-triviale Boolsche Algebren von solchen Projektionen nur dann existieren können, wenn die Zerlegung von L^p-Typ ist. In diesem Fall kann man den Raum als eine Art vektorwertigen L^p-Raumes darstellen.

Im klassischen Fall werden alle solche Projektionen beschrieben.

====

INHALT

0	Vorkenntnisse	1
1	Projektionfunktionen	4
2	Boolsche Algebren von F-Projektionen	9
3	Die klassischen Banachräume	21
4	Literatur	27

==========

0 Vorkenntnisse

Kenntnisse der elementaren Funktionalanalysis sowie der allgemeinen Topologie und der Maßtheorie werden vorausgesetzt. Man merke, daß wir unter Projektion eine lineare idempotente Abbildung verstehen. Alle Banachräume (die wir betrachten) sind reell.

0.1 Topologische Räume

Wenn nicht anders vermerkt, sind alle topologischen Räume, die wir betrachten, kompakt und Hausdorffsch. Eine Menge A in einem topologischen Raum heißt mager, wenn das Innere des Abschlusses von A leer ist. Eine Menge ist von erster Kategorie, wenn sie eine abzählbare Vereinigung von mageren Mengen ist. Ein bekannter Satz von Baire besagt, daß, unter unseren Voraussetzungen (d.h. kompakt und Hausdorffsch), die einzige offene Menge von erster Kategorie die leere Menge ist. Ein topologischer Raum heißt extrem unzusammenhängend, wenn der Abschluß jeder offenen Menge wieder offen ist und deshalb offen-abgeschlossen, was wir mit dem Wort 'clopen' bezeichnen. In einem extrem unzusammennängenden Raum läßt sich jede Borelmenge eindeutig als Differenz einer clopenen Menge und einer Menge von erster Kategorie darstellen. Ein extrem unzusammennängender Raum ist die Stone-Čech Kompaktifizierung von jeder dicht liegenden offenen Teilmenge.

0.2 Boolsche Algebren (siehe [Si])

Eine Boolsche Algebra ist ein distributiver Verband mit größtem und kleinstem Element, in dem jedes Element komplementiert ist. Eine Familie A von kommutierenden Projektionen auf einem Banachraum X so daß (i) $I,O\in A$ (ii) $E\in A \Rightarrow I-E\in A$ (iii) $E,F\in A \Rightarrow EF\in A$ bildet eine Boolsche Algebra mit den Verbandsoperationen $E\vee F=E+F-EF$ $E\wedge F=EF$. Jede Boolsche Algebra ist isomorph zu der Boolschen Algebra der clopenen Mengen eines bestimmten total unzusammenhängenden Raumes, des sogenannten 'Stonschen' Raumes der Boolschen Algebra, dessen Punkte die Ultrafilter in der Boolschen Algebra sind.

Eine Boolsche Algebra heißt vollständig, wenn jedes aufsteigende Netz ein Supremum hat. Der Stonsche Raum einer Boolschen Algebra ist genau dann extrem unzusammenhängend wenn die Algebra vollständig ist.

0.3 Die klassischen Banachräume

Mit $C(K)$ bezeichnen wir den Raum aller stetigen reellwertigen Funktionen auf einem (komp. Hausd.) topologischen Raum K versehen mit der Supremumnorm. Der Träger einer stetigen Funktion f ist die Menge $\operatorname{supp} f := \overline{\{k \mid k\in K, f(k)\neq 0\}}$.

Sei m ein Maß auf einem Maßraum. Für $1\leq p<+\infty$ ist $\mathcal{L}^p(m)$ der Raum aller reellwertigen m-meßbaren Funktionen mit der Eigenschaft $\int|f|^p dm <+\infty$ versehen mit der Halbnorm $\|f\|_p=(\int|f|^p dm)^{1/p}$. $L^p(m)$ ist der Banachraum $\mathcal{L}^p(m)/\{f\mid\|f\|_p=0\}$. $\mathcal{L}^\infty(m)$ ist der Raum aller fast überall beschränkten reellwertigen m-meßbaren Funktionen mit der Halbnorm $\|f\|_\infty=\inf\{\alpha \mid |f|\leq\alpha \text{ f.ü.}\}$. $L^\infty(m)$ ist der Banachraum $\mathcal{L}^\infty(m)/\{f\mid\|f\|_\infty=0\}$. Der Träger einer Funktion f in $\mathcal{L}^p(m)$ ist die Menge $\operatorname{supp} f := \{x \mid f(x)\neq 0\}$. Wenn $m(\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} g)=0$, sagt man, daß die zwei Funktionen f und g disjunkte Träger haben. In $L^p(m)$ $p\neq 2$, $p<+\infty$ haben zwei Funktionen f, g genau dann disjunkte Träger wenn $\|f+g\|_p^p+\|f-g\|_p^p=2\|f\|_p^p+2\|g\|_p^p$. Es folgt daraus, daß diese Eigenschaft unter einer Isometrie erhalten bleibt.

0.4 Strikt lokalisierbare Maßräume (siehe [Bi])

Ein Maßraum (S,Σ,m) heißt strikt lokalisierbar, wenn es eine Familie $S_\alpha, \alpha\in I$ von Mengen aus Σ gibt so daß
(i) $\alpha\neq\beta \Rightarrow S_\alpha\cap S_\beta=\emptyset$ (ii) $m(A)=\sum_\alpha m(A\cap S_\alpha)$ für alle $A\in\Sigma$ (iii) $m(S_\alpha)<+\infty$ für alle $\alpha\in I$. [Bei [Bi] heißt das strikt lokalisierbar und 'essentiell']
In einem strikt lokalisierbaren Maßraum gelten folgende Sätze:-
(a) (Riesz) $(L^1(m))'=L^\infty(m)$ unter der Dualität $\langle f,g\rangle\longrightarrow\int fg\, dm$.
(b) (Radon-Nikodym) m^* sei ein endliches Maß für (S,Σ) so daß, $m(A)=0 \Rightarrow m^*(A)=0$ $A\in\Sigma$. Dann gibt es eine Funktion f in $\mathcal{L}^1(m)$ so daß $m^*(A)=\int_A f\, dm$ für alle $A\in\Sigma$.

0.5 Borelmaße (Alle Maße sind positiv.)

Ein Borelmaß auf einem topologischen Raum ist ein Maß auf den Borelmengen (der von den offenen Mengen erzeugten σ-Algebra). Der Träger eines Borelmaßes m ist die Menge supp m := Komplement der Menge $\{k \mid$ Es existiert eine Umgebung U von k so daß $A \subseteq U \Rightarrow m(A)=0\}$. Der Träger eines Borelmaßes ist immer abgeschlossen. Ein Borelmaß heißt regulär, wenn $m(A) = \sup\{m(D) \mid D \subseteq A, D \text{ kompakt}\}$ für alle Borelmengen A. Für ein reguläres Borelmaß gilt $m(A) \neq 0 \Rightarrow A \cap \text{supp } m \neq \emptyset$. Eine Menge A heißt regulär abgeschlossen, wenn $A = (\text{Inn } A)^{-}$. Der Träger eines regulären Borelmaßes, das auf Mengen von erster Kategorie verschwindet, ist regulär abgeschlossen. Die regulär abgeschlossenen Mengen in einem extrem unzusammenhängenden Raum sind genau die clopenen Mengen.

0.6 Hyperstonsche Räume

K sei ein extrem unzusammenhängender Raum. Ein Borelmaß m auf K heißt perfekt, wenn (a) (K,B,m) strikt lokalisierbar ist (b) A von erster Kategorie $\Rightarrow m(A)=0$ (c) A offen und nicht leer $\Rightarrow m(A)>0$. [B steht für die Borelmengen in K]. Ein extrem unzusammenhängender Raum, der ein perfektes Maß zuläßt, heißt hyperstonsch.

1 Projektionfunktionen

1.1 Definition

Sei X ein Banachraum und sei F eine Funktion von $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ in $\mathbb{R}_+$. Eine Projektion E auf X heißt F-Projektion wenn

$$\|x\| = F(\|Ex\|, \|x-Ex\|) \quad \text{für alle } x \in X.$$

Die Norm eines Elementes $x \in X$ hängt also im Fall, E eine F-Projektion nur von den Normen der Elemente Ex und x-Ex ab. Die Frage,-für welche Funktionen F gibt es F-Projektionen?-wird in dem folgenden Lemma beantwortet.

1.2 Definition

Eine Funktion $F: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ heißt Projektionfunktion (PF) wenn (i) $F(1,0)=F(0,1)=1$ (ii) $(\alpha,\beta) \longrightarrow F(|\alpha|,|\beta|)$ ist eine Norm in $\mathbb{R}^2$.

1.3 Lemma

Es existiert ein Banachraum X und eine nicht-triviale F-Projektion auf X $\Longleftrightarrow$ F ist eine PF

Beweis

$\Longleftarrow$ Sei F eine PF dann $\mathbb{R}^2$ mit $\|(\alpha,\beta)\| = F(|\alpha|,|\beta|)$ ist ein Banachraum.
E: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $E(\alpha,\beta)=(\alpha,0)$ ist eine nicht-triviale F-Proj.

$\Longrightarrow$ Sei X ein Banachraum und E eine nicht-triviale F-Proj. in X. Sei $x \in$ Bild X und $y \in$ Kern X mit $\|x\|=\|y\|=1$. (i) folgt aus $\|x\|=F(\|x\|,0)$ und $\|y\|=F(0,\|y\|)$. Die Abbildung $\phi: \mathrm{lin}(x,y) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $\phi(\alpha x+\beta y)=(\alpha,\beta)$ ist ein Isomorphismus. Die induzierte Norm in $\mathbb{R}^2$ ist $F(|\alpha|,|\beta|)$. Also (ii). F ist eine PF.

1.4 Definitionen

Sei F eine PF.

$\overline{F}: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ ist die Funktion $\overline{F}(a,b)=F(b,a)$.

$F': \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ ist die Funktion $F'(a,b)=\sup \dfrac{ra+sb}{F(r,s)}$ $\quad r+s=1,\ r,s \geq 0$

Daß $\overline{F}$ eine PF ist, ist klar. Daß F' eine ist, folgt daraus, daß sie die normdefinierende Funktion in $\mathbb{R}^2$ ist, aufgefasst als

Dualraum von $\mathbb{R}^2$ mit der F-Norm. Es folgt auch, daß $(\overline{F})'=(\overline{F'})$ und $\overline{\overline{F}}=F''=F$.

1.5 Satz

Sei X ein Banachraum und F eine PF. Sei E eine F-Proj. in X. Dann I-E ist eine $\overline{F}$-Proj. in X und E' ist eine F'-Proj. in X'.

Beweis

$\|x\|=F(\|Ex\|,\|x-Ex\|)=\overline{F}(\|(I-E)x\|,\|x-(I-E)x\|)$ für alle $x\in X$.

I-E ist also eine $\overline{F}$-Proj. in X.

Hilfslemma

Sei $\alpha,\beta\leq 1$ dann $F(r,s)\geq F(\alpha r,\beta s)$ für alle $r,s\in\mathbb{R}_+$.

Beweis des Hilflemmas

OBdA $\alpha\leq\beta$. $(\alpha r,\beta s)=\alpha(r,s)+(\beta-\alpha)(0,s)$

Da F Norm $F(\alpha r,\beta s)\leq\alpha F(r,s)+(\beta-\alpha)F(0,s)$.

Aber $(0,2s)=(r,s)+(-r,s) \Rightarrow 2F(0,s)\leq 2F(r,s)$

Also $F(\alpha r,\beta s)\leq\beta F(r,s)\leq F(r,s)$.

Jetzt ist E'in X' offensichtlich eine Projektion. Wir brauchen also nur zu zeigen, daß $\|w\|=F'(\|E'w\|,\|w-E'w\|)$ für jedes $w\in X'$.

Sei $w\in X'$ beliebig. Sei $\varepsilon>0$. Es gibt $x_1,x_2\in X$ $\|x_1\|=\|x_2\|=1$ so daß

$(E'w)(x_1)\geq\|E'w\|-\varepsilon$ $\quad((I-E')w)(x_2)\geq\|w-E'w\|-\varepsilon$

Seien $r,s\in\mathbb{R}_+$ $r+s=1$. Setze $x=rEx_1+s(I-E)x_2$.

Dann $\|w\|\|x\|\geq w(x)\geq r\|E'w\|+s\|(I-E')w\|-\varepsilon$ und

$\|x\|=F(r\|Ex_1\|,s\|(I-E)x_2\|)\leq F(r,s)$ nach dem Hilfslemma.

Also $F(r,s)\|w\|\geq r\|E'w\|+s\|(I-E')w\|-\varepsilon$

$\geq r\|E'w\|+s\|(I-E')w\|$. Da ε von r,s unabhängig.

Das gilt für alle r,s mit $r+s=1$, $r,s\geq 0$.

Also $\|w\|\geq F'(\|E'w\|,\|w-E'w\|)$.

Jetzt sei $\varepsilon>0$. Es gibt ein $x\in X$ mit $\|x\|=1$ $w(x)\geq\|w\|-\varepsilon$.

$\|w\|-\varepsilon\leq w(x)-(E'w)(Ex)+(I-E')w)((I-E)x)\leq\|E'w\|\|Ex\|+\|(I-E')w\|\|(I-E)x\|$

$\leq F'(\|E'w\|,\|(I-E')w\|)F(\|Ex\|,\|(I-E)x\|)=F'(\|E'w\|,\|(I-E')w\|)$

Da ε beliebig $\|w\|\leq F'(\|E'w\|,\|(I-E')w\|)$ und E' ist eine F'-Proj..

1.6 Korollar

Sei E eine Projektion in X s.d.E' eine F-Projektion in X' ist. Dann E ist eine F'-Projektion in X.

Beweis

E'' ist eine F'-Proj. in X''. $E=E''|_X$ q.e.d.

Das folgende, etwas überraschende Ergebnis ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von Cunningham, Effros und Roy ([CER], Satz 1).

1.7 Definition

Eine PF F heißt glatt gdw $\lim_{\alpha\to 0} \frac{F(1,\alpha)-1}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{F(\alpha,1)-1}{\alpha} = 0$

1.8 Satz

Sei X ein Dualraum und sei F eine glatte PF.

Eine F-Proj. E in X ist w^*- stetig.

Beweis

Nach Grothendieck [G] genügt es zu zeigen, daß EX und (I-E)X w*-abgeschlossen sind. Wegen der Symmetrie in der Definition von 'glatt' genügt es zu zeigen, daß EX w*-abgeschlossen ist. Nach dem Satz von Krein-Šmullyan reicht es schon, wenn wir gezeigt haben, daß EX∩D w*-abgeschlossen ist, wobei D die abgeschlossene Einheitskugel in X ist.

Sei $\{x_\alpha\}$ ein Netz in EX∩D $\quad \{x_\alpha\} \xrightarrow{w^*} x \notin EX\cap D$

Dann $\left\{\frac{1}{2}(x_\alpha - Ex)\right\} \xrightarrow{w^*} \frac{1}{2}(x-Ex) \in (I-E)X\cap D$. Also OBdA $x\in(I-E)X$.

Für alle $\beta\in\mathbb{R}_+ \{x+\beta x_\alpha\} \xrightarrow{w^*} (1+\beta)x$: wegen der Kompaktheit der Einheitskugel in der w*-Topologie gilt die Ungleichung.

$$\|(1+\beta)x\| \le \liminf_\alpha \|x+\beta x_\alpha\|$$

$$[*]- \quad \|x\| \le \liminf_\alpha \left\{\frac{\|x+\beta x_\alpha\| - \|x\|}{\beta}\right\} \text{ für alle } \beta\in\mathbb{R}_+$$

$$\text{Aber } \frac{\|x+\beta x_\alpha\| - \|x\|}{\beta} = \frac{F(\beta\|x_\alpha\|,\|x\|)-\|x\|}{\beta}$$

Entweder $\|x\|=0$ oder (d_β die x_α's beschränkt)

$$\liminf_\alpha \frac{\|x+\beta x_\alpha\| - \|x\|}{\beta} \longrightarrow 0 \qquad (\beta\to 0)$$

Es folgt aus [*], daß $\|x\|$ doch 0 ist. $EX \cap D$ ist w*-abgeschlossen und folglich ist E w*-stetig.

1.9 Definition

Eine PF F heißt singulär gdw F' nicht glatt ist.

Es folgt aus 1.5 und 1.8, daß, wenn F nicht singulär ist, es eine eineindeutige Beziehung zwischen den F-Projektionen in X und den F'-Projektionen in X' gibt.

1.10 Lemma

Eine PF F ist singulär $\Longleftrightarrow$ für irgendeine $\varepsilon>0$ entweder $F(1,\varepsilon)=1$ oder $F(\varepsilon,1)=1$.

Beweis

'$\Leftarrow$' OBdA $F(1,\varepsilon)=1$ für irgendeine $\varepsilon>0$.

Sei $\alpha>0$ $F'(1,\alpha)=\sup\limits_{r+s=1} \frac{r+\alpha s}{F(r,s)} \geq \frac{1+\alpha\varepsilon}{F(1,\varepsilon)} = 1+\alpha\varepsilon$

$\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{F'(1,\alpha)-1}{\alpha} \geq \lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{1+\alpha\varepsilon-1}{\alpha} = \varepsilon>0$. Also F' nicht glatt.

'$\Rightarrow$' Da F' eine PF, gilt $\frac{F'(1,\alpha)-1}{\alpha} \geq 0$ für alle $\alpha>0$.

Und dieser Ausdruck wird kleiner mit α.

OBdA $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{F'(1,\alpha)-1}{\alpha} \neq 0$ dann es existiert eine $\varepsilon>0$ so daß

$$\frac{F'(1,\alpha)-1}{\alpha} \geq \varepsilon \quad \text{für alle } \alpha>0.$$

Dann $F(1,\varepsilon)= \sup\limits_{\substack{r+s=1 \\ r,s\geq 0}} \frac{r+\varepsilon s}{F'(r,s)} = \sup\limits_{s\geq 0} \frac{1+\varepsilon s}{F'(1,s)} \leq \sup\limits_{s\geq 0} \frac{1+\varepsilon s}{1+\varepsilon s} = 1$

Da $F(1,\varepsilon)$ sowieso größer als 1 ist, haben wir $F(1,\varepsilon)=1$.

1.11 Definitionen

Eine PF F heißt symmetrisch$\Longleftrightarrow$ $\overline{F}=F$.

Sei F eine symmetrische PF, dann

$$F^*(\alpha,\beta) := \frac{F(\alpha+\beta,|\alpha-\beta|)}{F(1,1)} \qquad \alpha,\beta \in \mathbb{R}_+$$

F^* ist eine (symmetrische) PF da die Projektion $(\alpha,\beta) \to (\frac{1}{2}(\alpha+\beta), \frac{1}{2}(\alpha+\beta))$ eine nicht-triviale F^*-Projektion in $\mathbb{R}^2$ mit der F-Norm ist.

Die folgenden PF's sind die normdefinierenden Funktionen für die zweidimensionalen L^p's.

1.12 Definition

$$F_p(\alpha,\beta) := (\alpha^p+\beta^p)^{\frac{1}{p}} \qquad 1 \leqq p < \infty$$

$$F_p(\alpha,\beta) := \max\langle \alpha,\beta \rangle \qquad p = \infty$$

Im nächsten Kapitel werden wir nur mit den F_p's arbeiten und wir werden in diesem Zusammenhang auch von der Bezeichnung p- Projektion (=F_p-Projektion) Gebrauch machen. In früheren Arbeiten (etwa [C_1,C_2,C_3],[A-E],[CER]) heißen F_1-Projektionen L-Projektionen und F_∞-Projektionen heißen M-Projektionen analog zu den L- und M-Räumen von Kakutani.

2 Boolsche Algebren von F-Projektionen

Wie im §0 bemerkt, bildet eine Familie A von kommutierenden Projektionen eine Boolsche Algebra, wenn

(i) $I,0\varepsilon A$ (ii) $E\varepsilon A \Rightarrow I-E\varepsilon A$ (iii) $E,F\varepsilon A \Rightarrow EF\varepsilon A$.

Wir wollen Boolsche Algebren untersuchen, wo die Projektionen alle F-Projektionen für eine bestimmte PF F sind. Man kann abstrakt viel über solche Algebren beweisen (siehe z.B.[C-S]) aber die Allgemeinheit ist nur scheinbar.

Erstens, ist es klar, daß wenn A aus mehr als nur I,0 besteht, F wegen (ii) symmetrisch sein muß. Wenn A mehr als vier Elementen enthält, kommen für F sogar nur die F_p's in Frage, wie der folgende Satz zeigt.

2.1 Satz

Sei X ein Banachraum, F eine symmetrische PF und E_1,E_2 zwei nicht-triviale kommutierende F-Projektionen in X dann

$$E_1=E_2 \text{ oder } E_1=I-E_2 \text{ oder } F=F_p \text{ für irgendeine p, } 1\leq p\leq+\infty.$$

Beweis

Wir brauchen das folgende Resultat von Bohnenblust [B,Satz 4.1].

B 4.1 Sei F eine Funktion $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}_+$ mit den folgenden 5 Eigenschaften

(i) $F(\alpha s,\alpha t)=\alpha F(s,t)$ für alle $\alpha,s,t\in\mathbb{R}_+$

(ii) $F(s,t)=F(t,s)$ für alle $s,t\in\mathbb{R}_+$

(iii) $F(0,1)=1$

(iv) $F(a,b)\leq F(s,t)$ für $a\leq s$ $b\leq t$.

(v) $F(F(s,t),u)=F(s,F(t,u))$ für alle $s,t,u\in\mathbb{R}_+$

Dann $F=F_p$ für irgendeine p $0<p\leq+\infty$.

Da unsere F eine PF ist, sind (i),(iii) und (iv) automatisch erfüllt. Wir haben auch (ii), wegen der Symmetrie von F.

Seien $X_1=E_1E_2X$ $X_2=E_1(I-E_2)X$ $X_3=(I-E_1)E_2X$ $X_4=(I-E_1)(I-E_2)X$

Dann $X=X_1\oplus X_2\oplus X_3\oplus X_4$. Darüber hinaus, haben wir, da E_1,E_2

nicht-trivial sind, daß $X_1+X_2\neq\{0\}$ $X_1+X_3\neq\{0\}$ $X_2+X_4\neq\{0\}$ $X_3+X_4\neq\{0\}$

Es können nur folgende Fälle auftreten.

Fall 1 $X_1\neq\{0\}$ $X_4\neq\{0\}$ $X_2=X_3=\{0\}$

Dann $E_1=E_2$.

Fall 2 $X_2\neq\{0\}$ $X_3\neq\{0\}$ $X_1=X_4=\{0\}$

Dann $E_1=I-E_2$.

Fall 3 $X_i,X_j,X_k\neq\{0\}$ für $i\neq j\neq k\neq i$.

OBdA i=1 j=2 k=3 die anderen Fälle sind genau analog.

Seien $x\varepsilon X_1$ $y\varepsilon X_2$ $z\varepsilon X_3$ $\|x\|=\|y\|=\|z\|=1$.

Seien $r,s,t\ \varepsilon\ \mathbb{R}_+$ $\|rx+sy+tz\|=F(\|rx+sy\|,\|tz\|)$ wegen E_1 F-Proj.

$=F(F(\|rx\|,\|sy\|),\|tz\|)$ wegen E_2 F-Proj.

$=F(F(r,s),t)$ wegen $\|x\|=\|y\|=\|z\|=1$.

Aber eine Zerlegung zuerst durch E_2 und dann E_1 ergibt

$\|rx+sy+tz\|=F(F(r,t),s)$

$=F(s,F(r,t))$ wegen Symmetrie von F.

Also $F(F(s,r),t)=F(F(r,s),t)=F(s,F(r,t))$ für alle $r,s,t\ \varepsilon\ \mathbb{R}_+$.

Das ist Bedingung (v) und $F=F_p$ für $0<p\leqq+\infty$.

Da F eine PF ist, ist $p\geqq1$.

q.e.d.

Wir haben also gezeigt, daß für $F\neq F_p$ eine Boolsche Algebra von F-Projektionen höchstens 4 Elementen enthält. Von jetzt an betrachten wir nur p-Projektionen.

2.2 Satz (Cunningham p=1,$+\infty$:Behrends $p\neq1,+\infty$)

Sei X ein Banachraum und seien E_1,E_2 zwei p-Projektionen in X ($p\neq2$), dann $E_1E_2=E_2E_1$.

Beweis

Siehe [C_2] und [Beh].

Wir brauchen $p\neq2$, weil es im Hilbertraum nichtkommutierende Paare von 2-Projektionen gibt. Für p=2 können wir maximale kommutierende Familien betrachten, deren Existenz aus dem Zornschen Lemma folgt.

2.3 Lemma [C-S, §2, Satz 10]

Sei X ein Banachraum und sei A eine maximale kommutierende Familie von p-Projektionen ($1 \leq p < +\infty$). Dann: A ist eine vollständige Boolsche Algebra von Norm 1 Projektionen.

Beweis

(i) $I, O \in A$. (ii) $E \in A \Rightarrow EF=FE$ $F \in A \Rightarrow (I-E)F=F(I-E)$ $F \in A \Rightarrow I-E \in A$

(iii) $E,F \in A \Rightarrow EG=GE$ $FG=GF$ $G \in A \Rightarrow EFG=EGF=GEF$ $G \in A \Rightarrow EF \in A$.

A ist eine Boolsche Algebra.

Sei $E_\alpha, \alpha \in I$ ein aufsteigendes Netz in A. Dann für jedes $x \in X$ $\|E_\alpha x\|$ ist ein aufsteigendes Netz von reellen Zahlen und von oben beschränkt (von $\|x\|$). Aber $\beta \geq \alpha \Rightarrow \|E_\beta x - E_\alpha x\|^p = \|E_\beta x\|^p - \|E_\alpha x\|^p$

$E_\alpha x$ ist also ein Cauchy Netz in X. Sei E definiert durch $Ex = \lim_\alpha E_\alpha x$ für alle $x \in X$. E ist linear und $\|E\| \leq 1$. Für alle $x \in X$

$EEx = \lim_\alpha E_\alpha Ex = \lim_\alpha \lim_\beta E_\alpha E_\beta x = \lim_\alpha E_\alpha x = Ex$ da $\beta \geq \alpha \Rightarrow E_\alpha E_\beta = E_\alpha$.

E ist also eine Projektion und sogar eine p-Projektion (da $\|E_\alpha x\| \longrightarrow \|Ex\|$ und $\|x - E_\alpha x\| \longrightarrow \|x - Ex\|$.). Sei $F \in A$, dann $EFx = \lim_\alpha E_\alpha Fx = \lim_\alpha FE_\alpha x = FEx$.

Wegen der Maximalität von A gilt $E \in A$. E ist offensichtlich ein Supremum für das Netz E_α und folglich ist A vollständig.

Wie wir in dem Beweis gesehen haben, ist das Supremum eines Netzes stets der Limes des Netzes in der starken Topologie von Operatoren. Wir werden eine Projektionenalgebra nur dann vollständig nennen, wenn diese zusätzliche Bedingung erfüllt wird. Man merke, daß eine Boolsche Algebra von p-Projektionen sehr wohl als Boolsche Algebra vollständig sein kann, ohne in diesem Sinn vollständig zu sein.

Die folgenden Definitionen und Lemmen dienen als Vorbereitung zum Satz 2.8.

2.4 Definitionen

$\overline{\mathbb{R}}$ bezeichnet die reellen Zahlen mit $-\infty$ und $+\infty$ adjungiert, topologisiert als $[-1,+1]$ durch $\alpha \longleftrightarrow \frac{\alpha}{1+|\alpha|}$.

$C_{\overline{\mathbb{R}}}(K)$ ist die Menge aller stetigen Funktionen von einem topologischen Raum K in $\overline{\mathbb{R}}$.

2.5 Lemma

K sei hyperstonsch und m ein perfektes Maß auf K.

Dann (i) $C(K) \cong L^{\infty}(m)$.

(ii) Für jede m-meßbare reellwertige Funktion f auf K gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion $f^* \in C_{\overline{\mathbb{R}}}(K)$ so daß $f=f^*$ m-f.ü.

Beweis

(i) Die Abbildung $\emptyset$: $C(K) \longrightarrow L^{\infty}(m)$ definiert durch $f \longrightarrow$ die Äquivalenzklasse, die f enthält, ist offensichtlich linear. $\|\emptyset(f)\| = \inf\{\alpha \mid |f| \leq \alpha \text{ m-f.ü.}\}$. Aber wenn $|f|$ überhaupt größer als α ist, dann, da stetig, auch auf einer nicht-leeren offenen Menge und eine solche Menge ist keine Nullmenge (da m perfekt). Es folgt, daß $\emptyset$ eine Isometrie ist. $\sum_1^n \alpha_i \chi_{B_i}$ sei eine Treppenfunktion in $L^{\infty}(m)$. Da die Mengen B_i Borelmengen sind, existieren clopene Mengen D_i so daß $\chi_{B_i} = \chi_{D_i}$ m-f.ü. . Die Funktion $\sum_1^n \alpha_i \chi_{D_i}$ ist stetig und liegt in der selben Äquivalenzklasse wie $\sum_1^n \alpha_i \chi_{B_i}$. Da Treppenfunktionen dicht liegen, ist $\emptyset$ ein isometrischer Isomorphismus zwischen $C(K)$ und $L^{\infty}(m)$.

(ii) f sei m-meßbar und reellwertig. Dann $g := \frac{f}{1+|f|} \in L^{\infty}(m)$ und $\|g\|_{\infty} \leq 1$. Es folgt aus (i), daß eine eindeutig bestimmte Funktion $h \in C(K)$ existiert, so daß $h=g$ m-f.ü. und $\|h\| \leq 1$. f^* sei $\frac{h}{1-|h|}$.

Es folgt, daß es, für alle p, eine injektive Abbildung von $L^p(m)$ in $C_{\overline{\mathbb{R}}}(K)$ gibt. [Äquivalenzklasse von $f \longrightarrow f^*$ wie in 2.5(ii)]. Das Bild dieser Abbildung, versehen mit der von $L^p(m)$ übertragenen Struktur eines Banachverbandes, bezeichnen wir mit $C^p(K:m)$.

2.5 (i) besagt, daß $C^{\infty}(K:m) = C(K)$.

2.6 Definitionen

K hyperstonsch, m ein perfektes Maß auf K.

X_k ein Banachraum für alle $k\in K$.

$\int_K^{\oplus p} X_k \, dm := \left\{ f \,\middle|\, f:K\longrightarrow\{\infty\}\cup\bigcup_k X_k : f(k)\neq X_k \Rightarrow f(k)=\infty \text{ für alle } k\in K : \|f\|\in \mathcal{L}^p(K:m) \right\}$.

ist das p-direkte Integral der Banachräume X_k über $(K:m)$.

$|||f|||_p := \|\|f\|\|_p$.

Ein p-Integralmodul ist eine Teilmenge X eines p-direkten Integrals mit den Eigenschaften

(a) $f,g\in X \Rightarrow$ es existiert $h\in X$ so daß $f(k)+g(k)=h(k)$ $f(k),g(k)\neq\infty$

(b) $f\in X, g\in C(K) \Rightarrow$ es existiert $h\in X$ so daß $g(k)f(k)=h(k)$ $f(k)\neq\infty$

(c) $X_k=\overline{\{f(k)\,|\, f\in X,\ f(k)\neq\infty\}}$ für alle k.

Ein p-Integralmodul ist ein normierter C(K)-Modul mit der Modulstruktur, die von (a) und (b) induziert wird, und der Norm $|||\cdot|||_p$. Man merke, daß die Funktion h in (a) und (b) eindeutig bestimmt ist, da $|||f|||_p=0 \Rightarrow f\equiv 0$.

2.7 Lemma

Ein vollständiger p-Integralmodul ist eine maximale additive Gruppe des p-direkten Integrals (d.h. eine maximale Teilmenge mit der Eigenschaft (a)).

Beweis

X sei ein vollständiger p-Integralmodul des p-direkten Integrals $\int_K^{\oplus p} X_k \, dm$. $\overline{X}$ sei eine additive Gruppe in dem direkten Integral mit $X\subsetneq\overline{X}$.

Sei $f\in\overline{X}\setminus X$.

(a) $p<+\infty$.

Sei $\varepsilon>0$. Sei D eine clopene Menge so daß $m(D)<+\infty$ $\int_D \|f\|^p dm \leq \int_{K\setminus D} \|f\|^p dm - \frac{\varepsilon}{3}^p$

und f auf D endlich ist.

Für jeden Punkt $k\in D$ existiert x_k so daß $\|x_k - f(k)\|^p < \frac{\varepsilon^p}{m(D)}$ $x_k\in X$

Dann existiert O_k offen so daß $\|x_k-f\|^p \leq \frac{\varepsilon^p}{3m(D)}$ auf $O_k\supseteq D$.

D ist kompakt. Es existieren also Punkte $k_1 \ldots\ldots k_n$ und

offene Mengen $O_{k_1} \ldots\ldots O_{k_n}$, so daß $D=\dot{\bigcup_1^n} O_{k_i}$. Es sei $D_1=\overline{O}_{k_1}$, $D_2=\overline{O}_{k_2} \setminus D_1$ und so weiter. Dann ist D die disjunkte Vereinigung der clopenen Mengen D_i.

$$|||f-\sum \chi_{D_i} x_{k_i}|||_p^p = \int \|f-\sum \chi_{D_i} x_{k_i}\|^p dm \leq \int_D \|f-\sum \chi_{D_i} x_{k_i}\|^p dm + \varepsilon^p/3$$

$$= \sum \int_{D_i} \|f-x_{k_i}\|^p dm + \varepsilon^p/3 \leq [\varepsilon^p/3 m(D)] \sum m(D_i) + \varepsilon^p/3 = 2\varepsilon^p/3 < \varepsilon^p .$$

X ist vollständig in $|||\cdot|||_p$. $f \varepsilon X$. Widerspruch.

(b) $p=+\infty$

Sei $\varepsilon>0$. Für jeden Punkt $k \varepsilon K$ existiert $x_k \varepsilon X$ so daß $\|x_k(k)-f(k)\| \leq \varepsilon/2$ Dann auch O_k offen so daß $\|x_k(t)-f(t)\| \leq \varepsilon$ für $t \varepsilon O_k$. K ist kompakt und wir finden, wie in (a) , clopene Mengen D_i so daß $K=\dot{\bigcup} D_i$.

Jetzt $|||f-\sum \chi_{D_i} x_{k_i}|||_\infty = \sup_i \sup_{t \varepsilon D_i} \|f(t)-x_{k_i}(t)\| \leq \varepsilon$.

Jetzt kommen wir zum Hauptsatz der Arbeit. Er ist ein Analogon zum Satz 2 in [C_3], wobei die soeben definierten p-Integralmodule die Rolle der Funktionmodule spielen. Man vergleiche auch Satz 4 in [C_3].

2.8 Satz

X sei ein Banachraum. A sei eine vollständige Boolsche Algebra von p-Projektionen auf X ($1 \leq p < +\infty$). $C:=\overline{\text{lin}}\, A$ in B(X).

Dann: (a) C ist isometrisch algebraisomorph zu C(K), wobei K der Stonsche Raum von A ist.

(b) K läßt ein perfektes Maß m zu.

(c) Es existiert eine Abbildung $x \longrightarrow [x]$ von X in $[C^p(K:m)]_+$ so daß (i) $\|[x]\|_p = \|x\|$ für alle $x \varepsilon X$

(ii) $[x+y] \leq [x]+[y]$ für alle $x,y \varepsilon X$

(iii) $[Tx] = |T|\,[x]$ für alle $x \varepsilon X$ und $T \varepsilon C$, wobei auf der rechten Seite T in $C(K)[\cong C]$ ist.

(d) X ist isometrisch isomorph als C(K)-Modul zu einem p-Integralmodul über (K:m). [X hat die C(K)-Modul-Struktur die von der Isometrie $C \cong C(K)$ induziert wird]

Beweis

(a) T∈lin A. Dann läßt sich T als $\sum_{1}^{n} \alpha_i E_i$ schreiben, wobei $\sum_{1}^{n} E_i = I$. Wir nennen eine solche Darstellung von T normal. K sei der Stonsche Raum von A. Für U∈K gibt es genau eine E_i so daß $E_i \in U$ [$\sum_{1}^{n} E_i = I$ und U ist Ultrafilter]. $\sum_{1}^{n} \alpha_i E_i = \sum_{1}^{m} \beta_j F_j$ seien zwei normale Darstellungen von T. U sei ein Ultrafilter und E_r, $F_s \in U$. Wenn wir beide Darstellungen durch $E_r F_s$ multiplizieren, kriegen wir $(\alpha_r - \beta_s) E_r F_s = 0$. Aber $E_r, F_s \in U \Rightarrow E_r F_s \in U$ und erst recht $E_r F_s \neq 0$. Also $\alpha_r = \beta_s$.
Die Funktion $\hat{T}: K \longrightarrow \mathbb{R}$, $\hat{T}(U)$=Koeffizient der Projektion in einer normalen Darstellung, die in U liegt, ist wohl-definiert. Sie ist auch stetig, da, wenn $\hat{T}(U) = \alpha_r$, $\{V \mid E_r \in V \in K\}$ eine Umgebung von U ist, auf der $\hat{T} \equiv \alpha_r$. Man definiere $\emptyset$: lin A $\longrightarrow$ C(K) ,vermöge $\emptyset(T) = \hat{T}$.

(i) $\emptyset$ ist Algebrahomomorphismus.

$S = \sum_{1}^{n} \alpha_i E_i$, $T = \sum_{1}^{m} \beta_j F_j$ seien normale Darstellungen von zwei Operatoren in lin A. Dann $S+T = \sum_{1}^{n} \sum_{1}^{m} (\alpha_i + \beta_j) E_i F_j$ und $ST = \sum_{1}^{n} \sum_{1}^{m} (\alpha_i \beta_j) E_i F_j$ und diese Darstellungen sind ebenfalls normal. Für U∈K, $E_r, F_s \in U \Rightarrow E_r F_s \in U$.
Es folgt, daß $\widehat{S+T}(U) = \alpha_r + \beta_s = \hat{S}(U) + \hat{T}(U)$ und $\widehat{ST}(U) = \alpha_r \beta_s = \hat{S}(U)\hat{T}(U)$.

(ii) $\emptyset$ ist eine Isometrie

$T = \sum_{1}^{n} \alpha_i E_i$ sei eine normale Darstellung von T∈lin A. Dann $\|\hat{T}\| = \sup_{E_i \neq 0} |\alpha_i|$ da $E_i \neq 0 \Leftrightarrow$ es existiert ein Ultrafilter U mit $E_i \in U$.
Aber, für alle x∈X, $\|Tx\|^p = \|\sum_{1}^{n} \alpha_i E_i x\|^p = \sum_{1}^{n} \|\alpha_i E_i x\|^p \leq (\sup_{E_i \neq 0} |\alpha_i|)^p \sum_{1}^{n} \|E_i x\|^p$
$= (\sup_{E_i \neq 0} |\alpha_i|)^p \|x\|^p$ [wegen $\sum_{1}^{n} E_i = I$].

Und, andererseits, wenn $|\alpha_j| = \sup_{E_i \neq 0} |\alpha_i|$ mit $E_j \neq 0$, dann

$\|Tx\| = \|\sum_{1}^{n} \alpha_i E_i x\| = |\alpha_j| \|E_j x\| = |\alpha_j| \|x\|$ für $x \in E_j X$ $x \neq 0$. $\|T\| \sup_{E_i \neq 0} |\alpha_i| = \|\hat{T}\|$.

Wir setzen $\emptyset$ auf $C = \overline{\text{lin}}\ A$ stetig fort. U,V seien zwei Ultrafilter in K U≠V. E sei eine Projektion in A so daß E∈U und E∉V. Dann $\hat{E}(U) = 1$ und $\hat{E}(V) = 0$. Bild von C unter $\emptyset$ ist also eine abgeschlossene Unteralgebra von C(K), die die Konstanten enthält und die die Punkte trennt. Nach dem Satz von Stone-Weierstraß ist Bild C=C(K).

(b) Für D clopen in K sei E_D die zu D gehörige Projektion in A . Sei $x\in X$. Für B abgeschlossen in K definieren wir

$$m_x(B) := \inf\{\|E_D x\|^p : D \text{ clopen}, D\supseteq B\} = \|E_{\text{Inn}B} x\|^p$$

Inn B ist clopen, weil K extrem unzusammenhängend ist (K ist Stonscher Raum einer vollständigen Boolschen Algebra). Die Äquivalenz der zwei Definitionen folgt aus unserer zusätzlichen Bedingung bei der Definition von Vollständigkeit in Projektionalgebren. Die folgenden Eigenschaften von m_x folgen unmittelbar aus der Definition.

(i) $0\leq m_x(B)<+\infty$ für alle B (abgeschlossen).

(ii) $B\supseteq D \Rightarrow m_x(B)\geq m_x(D)$ für alle B,D (abg.).

(iii) $m_x(B\cup D)\leq m_x(B)+m_x(D)$ für alle B,D (abg.).

(iv) $m_x(B\dot\cup D)= m_x(B)+m_x(D)$ für alle B,D (abg.)mit $B\cap D=\emptyset$.

(v) $m_x(B)=\inf\{m_x(D): B\subseteq \text{Inn } D\}$.

Eine solche Funktion läßt sich eindeutig zu einem regulären Borelmaß fortsetzen, das wir ebenfalls m_x schreiben.Sei B eine magere Borelmenge. Dann $m_x(B)\leq m_x(\overline{B})=\|E_{\text{Inn}\,\overline{B}} x\|^p=0$. Da $E_\emptyset=0$. Für jedes $x\in X$ können wir also ein reguläres Borelmaß m_x konstruieren, das auf Mengen von erster Kategorie verschwindet. Sei x_α, $\alpha\in I$ eine maximale Familie von Elementen aus X, so daß $\alpha\neq\beta \Rightarrow \text{supp } m_{x_\alpha}\cap \text{supp } m_{x_\beta}=\emptyset$. [Zornsches Lemma]. Die Formel $m(B):=\sum_I m_{x_\alpha}(B)$ (für Borelmengen B) definiert ein Borelmaß auf K. m ist von der Definition her strikt lokalisierbar und verschwindet auf Mengen von erster Kategorie. Sei O eine nicht-leere offene Menge in K. $\overline{O}$ ist clopen und nicht leer. Es existiert $x\in E_{\overline{O}}X$ $\|x\|=1$. $m_x(K)=\|x\|^p=\|E_{\overline{O}}x\|^p=m_x(\overline{O})$. Also $\text{supp } m_x\subseteq\overline{O}$. Da die Familie maximal ist, gibt es ein x_α, so daß $\text{supp } m_{x_\alpha}\cap\overline{O}\neq\emptyset$. Da $\text{supp } m_{x_\alpha}$ clopen ist, gilt auch $\text{supp } m_{x_\alpha}\cap O\neq\emptyset$ und folglich $m_{x_\alpha}(O)>0$. $m(O)>0$. m ist ein perfektes Maß.

(c) Wir identifizieren C(K) und C [wie in (a)].

Sei $x\varepsilon X$. Nach dem Satz von Radon-Nikodym gibt es eine $\mathcal{L}^1$-Funktion und deshalb auch eine $C^1(K:m)$- Funktion f_x, so daß $m_x = f_x m$.

Da m_x positiv ist, ist auch f_x positiv. Sei $[x] := f_x^{1/p} \varepsilon (C^p(K:m))_+$.

Dann (i) $\|[x]\|_p^p = \int f_x \, dm = m_x(K) = \|x\|^p$.

(ii) $\|E(x+y)\| \leq \|Ex\| + \|Ey\|$ für alle $E\varepsilon A$.

$\Rightarrow (m_{x+y}(B))^{1/p} \leq (m_x(B))^{1/p} + (m_y(B))^{1/p}$ für alle Borelmengen B

$\Rightarrow [x+y] \leq [x]+[y]$.

(iii) Sei $T = E_D$, D clopen in K.

Dann $\int_B [Tx]^p dm = m_{Tx}(B) = \|E_B E_D x\|^p = \|E_{B\cap D} x\|^p = m_x(B\cap D) = \int_B (\chi_D [x])^p dm$ für alle clopene Mengen B. Es folgt, daß

1 $[Tx] = |T|[x]$ für $T = E_D = \chi_D$.

Jetzt seien T,S zwei Operatoren, so daß (iii) gilt und ST=0.

Dann $D := \{k \mid S(k) \neq 0\}^-$ ist clopen in K und $E_D S = S$, $E_D T = 0$.

$\int_B [(S+T)x]^p dm = m_{(S+T)x}(B) = \|E_B (S+T)x\|^p = \|E_B Sx\|^p + \|E_B Tx\|^p$ (durch Anwendung der p-Projektion E_D) $= m_{Sx}(B) + m_{Tx}(B) = \int_B (|S|[x])^p dm + \int_B (|T|[x])^p dm$ da (iii) für T und S gilt. Aber $ST=0 \Rightarrow |S|^p + |T|^p = |S+T|^p$.

$\int_B [(S+T)x]^p dm = \int_B (|S+T|[x])^p dm$ für alle clopene Mengen B. Es folgt, daß

2 $[(S+T)x] = |S+T|[x]$. Aus 1 und 2 folgt, daß (iii) für $T\varepsilon \text{lin } A$ gilt und , aus Stetigkeit, für alle $T\varepsilon C$.

(d) Für jeden $k\varepsilon K$ definieren wir $Y_k := \{x \mid x\varepsilon X, [x](k) \neq \infty\}$ und versehen ihn mit der Halbnorm $\|x\|_k := [x]'k$, Halbnorm wegen (c),(ii) und (iii)). Wir definieren den Banachraum X_k durch

$X_k := [Y_k / \{x \mid x\varepsilon X, [x](k)=0\}]^{-k}$ mit der Norm $\|\cdot\|_k$.

Wir definieren eine Abbildung von X in $\int_K^{\oplus} X_k dm$ durch $x \longrightarrow \langle x \rangle$ wobei

$\langle x \rangle(k) = \infty$ wenn $[x](k) = \infty$.

$\langle x \rangle(k)$ = die Äquivalenzklasse von x in X_k sonst.

Diese Abbildung ist offensichtlich linear und , aus (c) (i), auch eine Isometrie. Von der Konstruktion haben wir auch, daß

$X_k = \{\langle x \rangle(k) \mid x\varepsilon X, \langle x \rangle(k) \neq \infty\}^-$. Es bleibt also nur zu zeigen, daß $\langle Tx \rangle = T\langle x \rangle$ für $T\varepsilon C = C(K)$ und $x\varepsilon X$. Sei $k\varepsilon K$ und $\langle x \rangle(k) \neq \infty$. Dann $[(T-T(k)I)x] = |T-T(k)\cdot 1|[x]$. Und $[(T-T(k)I)x](k) = 0$. Folglich ist

$\langle Tx\rangle(k)=T(k)\langle x\rangle(k)$. Da $\langle x\rangle(k)\neq\infty$ f.ü. , gilt $\langle Tx\rangle=T\langle x\rangle$.

q.e.d.

Wir werden die Schreibweise des Satzes 2.4 beibehalten: d.h. wenn A eine vollständige Boolsche Algebra von p-Projektionen auf einem Banachraum X ist, werden wir $C,K,m_x,[\cdot],m$ usw. schreiben, ohne zu sagen, "K sei der Stonsche Raum von A ", "m sei ein perfektes Maß auf K" usw. .

2.9 Definitionen

X sei ein Banachraum und M eine Teilmenge von B(X), deren Elemente miteinander vertauschbar sind.

Ein M-Zyklus ist ein abgeschlossener Unterraum J von X, so daß $T\varepsilon M \Rightarrow TJ\subseteq J$.

Ein M-Ideal ist ein abgeschlossener Unterraum J von X, so daß $T\varepsilon[M]_{KOMM} \Rightarrow TJ\subseteq J$.

Wenn $M=\{I,O\}$, sind die M-Zyklen genau die abgeschlossenen Unterräume und die M-Ideale sind X und $\{O\}$. Wenn $J_\alpha,\alpha\varepsilon I$ eine Familie von M-Zyklen (bzw. M-Ideale) ist, dann sind $(\sum_I J_\alpha)^-$ und $\bigcap_I J_\alpha$ auch M-Zyklen (bzw. M-Ideale). Insbesondere ist der von einem Element erzeugte M-Zyklus (bzw. das .... M-Ideal) erklärt. Den von einem Element x erzeugten M-Zyklus schreiben wir S(M:x).

2.10 Lemma

A sei eine vollständige Boolsche Algebra von p-Projektionen $(1\leq p<+\infty)$ auf einem Banachraum X. Dann

$$S(A:x)\cong L^p(m_x) \quad \text{für alle } x\varepsilon X.$$

Beweis

m_x ist endlich und deshalb gilt $\mathcal{L}^\infty(m_x)\subseteq\mathcal{L}^p(m_x)$ für alle p.
Für $T\varepsilon C$ sei $\emptyset(Tx)$=die Äquivalenzklasse von T in $L^p(m_x)$. [C ist mit $C(K)\subseteq\mathcal{L}^\infty(m_x)$ identifiziert]. $\emptyset$ ist wohl-definiert, da $Tx=Sx$ $\Rightarrow (T-S)x=0 \Rightarrow [(T-S)x]=0 \Rightarrow |T-S|[x]=0 \Rightarrow |T-S|=0$ m_x-f.ü. .

Ø ist offensichtlich linear. Ø ist eine Isometrie, denn $\|T\|_p^p=\int|T|^p dm_x=\int|T|^p[x]^p dm\int|Tx|^p dm=\|Tx\|_p^p=\|Tx\|^p$. Wir setzen Ø auf S(A:x) fort $(S(A:x)=\{Tx|T\in C\}^-)$. Da ganz $L^\infty(m_x)$ getroffen wird und $L^\infty(m_x)$ dicht in $L^p(m_x)$ liegt, ist Ø surjektiv.

2.11 Satz [p=1 [C_2], p≠1 X glatt und reflexiv [C-S]].

A sei eine vollständige Boolsche Algebra von p-Projektionen ($1\leq p<+\infty$) auf einem Banachraum X. Sei $x\in X$. Es existiert eine Norm 1 Projektion $F\in[A]_{KOMM}$ so daß $FX=S(A:x)$.

Beweis

Wenn x=0, setzen wir F=0. OBdA $\|x\|=1$. $\int: f\longrightarrow\int f\,dm_x$ ist ein lineares Funktional auf $L^p(m_x)$ ($\cong S(A:x)$) mit Norm 1. Sei D=supp m_x (clopen). E_DX ist ein A-Zyklus und $x\in E_DX$. Also $E_DX\geq S(A:x)$. $\int\circ E_D$ ist ein lineares Funktional mit Norm 1 auf $S(A:x)\oplus(I-E_D)X$. Sei x* ein Element von X' mit Norm 1 , das $\int\circ E_D$ fortsetzt (Hahn-Banach). Für $y\in X$ definieren wir m^y durch $m^y(B\Delta C)=x^*(E_By)$ wobei $B\Delta C$ die Darstellung einer typischen Borelmenge als Differenz einer clopenen Menge B und einer Menge C von erster Kategorie ist. Da x* linear und stetig ist, ist m^y ein Borelmaß. $m_x(B\Delta C)=0\Rightarrow\|E_Bx\|=0\Rightarrow B\cap\text{supp } m_x=\emptyset$ $\Rightarrow E_BX\subseteq(I-E_D)X\Rightarrow x^*(E_By)=0$. Es existiert also eine Funktion $f^y\in\mathcal{L}^1(m_x)$ so daß $m^y=f^y\cdot m_x$ (Radon-Nikodym). Sei $B_1,B_2,\ldots\ldots,B_n$ eine Zerlegung von K in disjunkten clopenen Mengen .

$\sum_1^n\left|\int_{B_i}f^y dm_x\right|^p=\sum_1^n|m^y(B_i)|^p=\sum_1^n|x^*(E_{B_i}y)|^p\leq\sum_1^n\|E_{B_i}y\|^p=\|y\|^p$. Da die E_{B_i}'s alle p-Projektionen sind und $\sum_1^n E_{B_i}=I$. Da diese Ungleichung für jede Zerlegung gilt, haben wir, daß $f^y\in\mathcal{L}^p(m_x)$ und $\|f^y\|_p\leq\|y\|$.

$F:X\longrightarrow S(A:x)$ sei definiert durch $y\longrightarrow$ die Äquivalenzklasse von f^y in $L^p(m_x)\cong S(A:x)$.

Dann (i) F ist linear, da x* und die E_{B_i}'s linear sind.

(ii) $\|F\|\leq 1$.

Es bleibt nur zu zeigen, daß Fy=y für $y\in S(A:x)$. Sei y=Tx, $T\in C$. Dann $m^y(B\Delta C)=x^*(E_BTx)=\int_B T dm_y$. Da das für alle B, gilt, muß $f^y=T$ m_y-f.ü. gelten und deshalb Fy=Tx=y. Da solche y dicht in S(A:x) liegen, gilt

$Fy=y$ für alle $y\in S(A:x)$. Daß F in $[A]_{KOMM}$ liegt, ist von der Konstruktion klar.

2.12 Satz

A sei eine vollständige Boolsche Algebra von p-Projektionen auf einem Banachraum X ($1\leq p<+\infty$).

Dann J ist A-Ideal $\Longleftrightarrow$ $J=EX$ für $E\in A$.

Beweis

'$\Longleftarrow$' Klar.

'$\Rightarrow$' (a) $x\in J, y\in X \quad [x]=[y] \Rightarrow y\in J$

Wir definieren $\emptyset: S(A:x)\longrightarrow S(A:y)$ durch $\emptyset(Tx)=Ty$, $T\in C$ stetig fortgesetzt.(Eine Isometrie wegen $[x]=[y]$). Sei F die im letzten Satz konstruierte Projektion von X auf $S(A:x)$. Dann $\emptyset\cdot F\in[A]_{KOMM}$ und $\emptyset\cdot F(x)=y$. Also $y\in J$.

(b) $x\in J, y\in X, \alpha\in\mathbb{R} \quad [y]\leq\alpha[x]\Rightarrow y\in J$

Für $n\in\mathbb{N}$ sei $A_n:=\left\{k \mid k\in K,\ 1/n\leq[x](k)\leq n\right\}$. Sei $T_n:=[y]/[x]$ auf A_n, stetig und zwischen 0 und α auf K (Tietze). $[T_n x]=|T_n|[x]=[y]$ auf A_n.

$m\geq n\Rightarrow [(T_n-T_m)x]=|T_n-T_m|[x]\begin{cases}=0 \text{ auf } A_n\\ \leq\alpha[x] \text{ außerhalb } A_n.\end{cases}$

$T_n x$ ist also Cauchy. $\bar{x}$ sei Limes der Folge $T_n x$. Dann $\bar{x}\in J$ und $[\bar{x}]=[y]$. (b) folgt aus (a).

(c) $x\in J, y\in X \ \operatorname{supp}[y]\subseteq\operatorname{supp}[x]\Rightarrow y\in J$

Für $n\in\mathbb{N}$ sei $B_n:=\left\{k \mid [y](k)<n[x](k)\right\}^-$. B_n ist clopen. E_n sei χ_{B_n} $n\in\mathbb{N}$. $(\bigcup_1^\infty B_n)^-=\operatorname{supp}[x]\supseteq\operatorname{supp}[y]$. Folglich gilt $E_n y\longrightarrow y$. Aber $[E_n y]\leq n[x]$. (c) folgt aus (b).

(d) $J=EX$ für $E\in A$.

Sei $D:=(\bigcup_{x\in J}\operatorname{supp}[x])^-$. D ist clopen und $E_D X\supseteq J$. Sei $y\in E_D X$. Dann, für alle $x\in J$, $\operatorname{supp}[E_{\operatorname{supp}[x]}y]\subseteq\operatorname{supp}[x]$. Aus (c) folgt $E_{\operatorname{supp}[x]}y\in J$

Aber $E_D=\sup_{x\in J} E_{\operatorname{supp}[x]}$ und J ist abgeschlossen. $y=E_D y\in J$. $E_D X=J$.

3 Die klassischen Banachräume

In diesem Kapitel untersuchen wir die Frage der Existenz von F-Projektionen in den klassischen Banachräumen—$L^p(\mu)$, $C(K)$. Am Schluß des Kapitels steht eine Zusammenfassung der Resultate.

3.1 Satz

A sei eine vollständige Boolsche Algebra von p-Projektionen auf einem Banachraum X. $(1 \leq p < +\infty)$.

Dann sind Folgende äquivalent:-

(i) $[A]_{KOMM} = \overline{\text{lin}}\ A$

(ii) A ist maximal als Boolsche Algebra von beschränkten Projektionen

(iii) S(A:x) ist ein A-Ideal für alle $x \in X$

(iv) Jeder A-Zyklus ist ein A-Ideal

(v) $X \cong L^p(m)$ als normierter C(K)-Modul [$C(K) \cong \overline{\text{lin}}\ A$]

Beweis

(i) $\Rightarrow$ (ii) Klar

(ii) $\Rightarrow$ (iii) S(A:x) ist, nach 2.11, Bild einer Norm 1 Projektion F die mit allen Projektionen in A vertauschbar ist. A maximal $\Rightarrow F \in A$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) J sei ein A-Zyklus. Dann $J = (\sum_{x \in J} S(A:x))^{-}$, ein A-Ideal.

(iv) $\Rightarrow$(v)

Seien x_α, $\alpha \in I$ die Elemente von X, die zur Konstruktion von m beigetragen haben (siehe 2.8). Der Einfachheit halber schreiben wir m_α für m_{x_α}, D_α für supp m_α, und E_α für E_{D_α}. Eine $\mathcal{L}^p(m)$-Funktion f ist natürlich auch eine $\mathcal{L}^p(m_\alpha)$-Funktion und f=g m-f.ü. $\Rightarrow$ f=g m_α-f.ü. für alle $\alpha \in I$. Wir haben also, für alle α, eine kanonische Abbildung $f \longrightarrow f_\alpha$ von $L^p(m) \longrightarrow L^p(m_\alpha)$ und $L^p(m_\alpha)$ ist durch 2.10 mit $S(A:x_\alpha)$ identifiziert.

$\int_K |f|^p dm = \sum_\alpha \int_{D_\alpha} |f|^p dm_\alpha = \sum_\alpha \|f_\alpha\|^p$. Es folgt , daß, für $f \in L^p(m)$, die Summe $\sum_\alpha f_\alpha$ in X existiert. Wir definieren $\Phi: L^p(m) \longrightarrow X$ durch $\Phi f := \sum_\alpha f_\alpha$.

(a) $\emptyset$ ist linear.

(b) $\|f\|^p = \sum_\alpha \|f_\alpha\|^p$ (wie oben) $= \sum_\alpha \|E_\alpha \emptyset(f)\|^p = \|\emptyset(f)\|^p$.

Da $\alpha \neq \beta \Rightarrow E_\alpha E_\beta = 0$ und $\bigvee_\alpha E_\alpha = I$. $\emptyset$ ist eine Isometrie.

(c) Bild $\emptyset$ ist $(\sum_\alpha S(A:x_\alpha))^-$, ein A-Zyklus und deshalb ein A-Ideal.

Bild $\emptyset = E_D X$ für irgendeine clopene D, aber $x_\alpha \varepsilon$ Bild $\emptyset \Rightarrow D_\alpha \subseteq D$ für alle α $\Rightarrow D \supseteq (\bigcup_\alpha D_\alpha)^- = K$. $\emptyset$ ist surjektiv.

(d) Da die einzelnen Isometrien zwischen $L^p(m_\alpha)$ und $S(A:x_\alpha)$ die Modulstruktur respektieren (siehe 2.10), tut das auch $\emptyset$.

(iv) $\Rightarrow$ (i)

$X \cong L^p(m) \cong C^p(K:m)$. Sei $T \varepsilon [A]_{KOMM}$.

(a) $f \varepsilon C^p(K:m)$, $k \varepsilon K$ $|Tf(k)| > \|T\| |f(k)| \Rightarrow$ es gibt D clopen, $k \varepsilon D$, so daß $|Tf(\ell)| > \|T\| |f(\ell)|$ für alle $\ell \varepsilon D$ [wegen Stetigkeit] $\Rightarrow \int |T(\chi_D f)|^p dm = \int |\chi_D Tf|^p dm > \|T\|^p \int_D |f|^p dm$ im Widerspruch zu $\|T(\chi_D f)\| \leq \|T\| \|\chi_D f\|$.

Folglich gilt für alle $f \varepsilon C^p(K:m)$ $|Tf| \leq \|T\| |f|$.

(b) f und g seien zwei $C^p(K:m)$-Funktionen, die an dem Punkt k endlich und nicht null sind. Dann $(g(k)f - f(k)g)(k) = 0$. Aus (a) folgt daß $T(g(k)f - f(k)g)(k) = 0$. Aber T ist linear. $g(k)Tf(k) - f(k)Tg(k) = 0$.

Oder $\frac{Tf(k)}{f(k)} = \frac{Tg(k)}{g(k)}$.

(c) B sei die Menge $\{k \mid D \text{ clopen}, k \varepsilon D \Rightarrow m(D) = \infty\}$.

Dann, wenn $f \varepsilon C^p(K:m)$ und $k \varepsilon B$, gilt $f(k) = 0$, denn $f(k) = \varepsilon \neq 0 \Rightarrow$ $k \varepsilon \{1 \mid |f(1)| > \varepsilon/2\}^-$ eine clopene Menge mit endlichem Maß. Andererseits $k \notin B \Rightarrow$ es gibt D clopen, $k \varepsilon D$ so daß $m(D) < +\infty$. χ_D ist dann eine $C^p(K:m)$-Funktion, die an der Stelle k endlich und nicht null ist.

(a), (b) und (c) zusammen ergeben, daß die Funktion T^* ——
$T^*(k) := \frac{Tf(k)}{f(k)}$ $k \notin B$ $f \varepsilon C^p(K:m)$ mit $f(k)$ endlich und $\neq 0$ ———

eine wohl-definierte beschränkte stetige (da wir in einer Umgebung von k die selbe f wählen dürfen) Funktion von $K \setminus B$ in $\mathbb{R}$ ist. B ist abgeschlossen und mager, also, $K \setminus B$ offen und dicht und T^* läßt sich stetig zu einer C(K)-Funktion fortsetzen. $T \varepsilon C(K) = \overline{\text{lin}}\ A$.

In einem L^p-Raum haben wir viele p-Projektionen, z.B. die Abbildungen $f \longrightarrow f\chi_B$ für B meßbar. Solche Projektionen heißen charakteristische Projektionen.

3.2 Satz

X sei $L^p(\mu)$ für irgendein Maß μ und A eine vollständige Boolsche Algebra von p-Projektionen, die die charakteristischen Projektionen enthält.

Dann gelten (i)— (v) von 3.1 .

Beweis

Da (i)— (v) äquivalent sind, genügt es zu zeigen, daß (iii) gilt.

f sei in X. E sei die charakteristische Projektion, $Eg=\chi_{\text{supp } f}\, g$.

Dann $S(A:f) \subseteq EX$. Sei $g \in EX$.

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $B_n := \left\{t \middle| \frac{1}{n}|g(t)| < |f(t)|\right\}$ und $h_n := \begin{cases} \frac{g(t)}{f(t)} & t \in B_n \\ 0 & t \notin B_n. \end{cases}$

Dann $h_n \in L^\infty(\mu)$ für alle n und $h_n f = g$ in B_n und $=0$ sonst.

Aber supp $f \supseteq$ supp $g \Rightarrow \bigcup_1^\infty B_n =$ supp g μ-f.ü. $\Rightarrow h_n f \longrightarrow g$.

Da A die charakteristischen Projektionen enthält, enthält C die Operatoren $h \longrightarrow hh_n$ $(h \in L^p(\mu))$ für alle n. $h_n f \in S(A:f)$ für alle n. $S(A:f)$ abgeschlossen $\Rightarrow g \in S(A:f)$. $S(A:f) = EX$ ein A-Ideal.

Aus 3.1 folgt, daß A in 3.2 eindeutig bestimmt ist. Diese Algebra, die für $p \neq 2$ alle p-Projektionen enthält, läßt sich genauer beschreiben.

3.3 Definition

μ sei ein Maß und $S(\mu)$ die Menge aller σ-endlichen Mengen (bezüglich μ). Eine pseudocharakteristische Funktion (PCF) ist eine Funktion $P: S(\mu) \longrightarrow S(\mu)$ so daß

$$P(B \cap D) = P(B) \cap D \quad \mu\text{-f.ü.} \quad \text{für alle } B, D \in S(\mu).$$

Jede meßbare Menge D definiert eine PCF P_D durch $P_D(B) = D \cap B$ $B \in S(\mu)$.

Aus der Definition folgt, daß für eine PCF P:-

(a) $P(B) \subseteq B$ $B \in S(\mu)$ (b) $P(P(B)) = P(B)$ $B \in S(\mu)$ beide μ-f.ü. .

Eine PCF $P:S(\mu)\longrightarrow S(\mu)$ induziert eine pseudocharakteristische Projektion $E_P:L^p(\mu)\longrightarrow L^p(\mu)$ $(1\leq p<+\infty)$ durch

$$E_P(f):=\chi_{P(\text{supp } f)}f \qquad f\in L^p(\mu)$$

Wegen der PCF-Bedingung ist E_P linear. Aus (a) folgt, daß eine PCP mit den charakteristischen Projektionen kommutiert, und aus (b), daß eine PCP tatsächlich eine Projektion ist. Da E_Pf und $f-E_Pf$ disjunkte Träger haben, ist E_P eine p-Projektion.

A in 3.2 enthält also die PCP's.

3.4 Satz

Eine p-Projektion auf $L^p(\mu)$, die mit den charakteristischen Projektionen vertauschbar ist, ist pseudocharakteristisch.

[d.h. A in 3.2 besteht aus den PCP's]

Beweis

E sei eine solche p-Projektion. Wir definieren $P:S(\mu)\longrightarrow S(\mu)$ durch $P(\text{supp } f)=\text{supp } Ef$ $f\in L^p(\mu)$. [$B\in S(\mu)\Longleftrightarrow B=\text{supp } f$ für $f\in L^p(\mu)$]

(i) P ist wohl-definiert

Sei A die Menge der charakteristischen Projektionen.

$\text{supp } f=\text{supp } g \Rightarrow f\in S(A:g), g\in S(A:f)$ [wie in 3.2] $\Rightarrow Ef\in S(A:Eg), Eg\in S(A:Ef)$ $\Rightarrow \text{supp } Ef=\text{supp } Eg$ μ-f.ü.

(ii) P ist PCF

$P(B\cap C)=P(\text{supp } \chi_C f)$ [wobei $\text{supp } f=B$] $=\text{supp } E\chi_C f=\text{supp } \chi_C Ef=C\cap \text{supp } Ef$ $=C\cap P(B)$ μ-f.ü.

(iii) $E=E_P$

$f\in L^p(\mu)$ $B=P(\text{supp } f)$ Dann $\chi_B Ef=Ef=E(\chi_B f)=EE_Pf$.

$E_Pf\in S(A:Ef)\Rightarrow$ es gibt $h_n\in \text{lin } A$, $n\in\mathbb{N}$ so daß $h_nEf\longrightarrow E_Pf$.

Dann $Eh_nEf\longrightarrow EE_Pf=Ef$ aber $Eh_nEf=h_nEf\longrightarrow E_Pf$. qed

Wir haben jetzt eine explizite Beschreibung aller p-Projektionen in $L^p(\mu)$ $(1\leq p<+\infty,\ p\neq 2)$. In $L^2(\mu)$, einem Hilbertraum, ist natürlich jede orthogonale Projektion eine 2-Projektion.

Resultate, die mit 3.4 und Teilen von 3.1 und 3.2 äquivalent sind, sind schon von Sullivan [Su] erzielt worden.

Es folgt unmittelbar aus der Formel $\|x+y\|^2=\|x-y\|^2+4\langle x,y\rangle$ in reellem Hilbertraum, daß jede F-Projektion im Hilbertraum orthogonal und deshalb eine 2-Projektion ist. Im $L^p(\mu)$ ist die Lage kaum anders.

3.5 Satz

Sei $X=L^p(\mu)$ $(1\leq p<+\infty,\ p\neq 2)$. F sei eine PF und E eine nicht-triviale F-Projektion auf X. Dann:-

entweder (a) $F=F_p$

oder (b) $F=F_p^*$ und dim $X=2$.

Beweis

Sei $T=2E-I$. T ist eine Isometrie.

Fall 1. Es gibt keine $g\in X$, $g\neq 0$ so daß $g.Tg=0$ μ-f.ü. .

Sei $f\in X$ und $A\subseteq \operatorname{supp} Tf\setminus\operatorname{supp} f$. Dann: $\chi_A f=0$ μ-f.ü. und da T Isometrie $T\chi_A.Tf=0$ μ-f.ü.. (A integrierbar). Aber $A\subseteq\operatorname{supp} Tf$. $\chi_A T\chi_A=0$ μ-f.ü. $\Rightarrow$ $\chi_A=0$ μ-f.ü. Also $\operatorname{supp} Tf\subseteq\operatorname{supp} f$ μ-f.ü. .

B sei eine meßbare Menge. $Tf=T\chi_B f+T\chi_{B^c} f$ für alle $f\in X$.

$\chi_B Tf=T\chi_B f$ da $\chi_B T\chi_{B^c} f=0$. T ist also mit den charakteristischen Projektionen vertauschbar und folglich auch E. E ist eine p-Projektion.

Fall 2. Es gibt $g\in X$, $g\neq 0$ so daß $g.Tg=0$ μ-f.ü.

OBdA $\|g\|=1$. Sei $Y=\operatorname{lin}(g,Tg)$. Die Abbildung $(\alpha g+\beta Tg)\longrightarrow(\alpha,\beta)$ für $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ist eine lineare Isometrie von Y auf l_2^p. [Da $g.Tg=0$] $E|_Y$ induziert in l_2^p die Projektion $(\alpha,\beta)\longrightarrow(\frac{1}{2}(\alpha+\beta),\frac{1}{2}(\alpha+\beta))$, die, wie im 1.11 bemerkt wurde, eine F_p^*-Projektion ist.

Sei $h\in X$, $h\neq 0$ so daß $hg=h.Tg=0$ μ-f.ü. .

Dann, entweder $Eh\neq 0$ oder $(I-E)h\neq 0$. OBdA $Eh\neq 0$.

$Z:=\operatorname{lin}(Eh,(I-E)g)\tilde{=}l_2^p$. $E|_Z$ induziert $(\alpha,\beta)\longrightarrow(\alpha,0)$ eine p-Projektion. Ein Widerspruch, da E eine F_p^*-Projektion ist und $F_p\neq F_p^*$ $(p\neq 2)$.

Es folgt, daß jede Funktion in X von $\operatorname{supp} g\cup\operatorname{supp} Tg$ getragen wird.

Jetzt sei $\operatorname{supp} g=A\dot\cup B$ $\mu(A)>0$ $\mu(B)>0$.

Seien $h=\chi_A g$ $k=\chi_B g$. Dann $Z^*:=\operatorname{lin}(h,I-E)k\tilde{=}l_2^p$ und $E|_{Z^*}$ induziert $(\alpha,\beta)\longrightarrow(\alpha,0)$ Widerspruch. Es folgt, daß $\operatorname{supp} g$ ein Atom ist und analog, daß $\operatorname{supp} Tg$ auch ein Atom ist. $X\tilde{=}l_2^p$.

3.6 Korollar

X sei ein Lindenstraußraum. F sei eine PF und E eine nicht-triviale F-Projektion auf X. Dann:-

entweder (a) $F=F_\infty$

oder (b) $F=F_1$ und dim X=2.

Beweis

Nach 1.5 ist E' eine F'-Projektion auf $X'=L^1(\mu)$ für irgendein Maß . Korollar folgt aus dem vorangegangenen Satz.

Zusammenfassung der Resultate.

1. $L^2(\mu)$

Es gibt nicht-triviale F-Projektionen nur für $F=F_2$ und jede orthogonale Projektion ist eine 2-Projektion. Die PCP's bilden eine maximale Familie von kommutierenden 2-Projektionen.

2. $L^p(\mu)$ $1\leq p<+\infty$ $p\neq 2$

Es gibt nicht-triviale F-Projektionen nur für $F=F_p$ oder $=F_p^*$. Die p-Projektionen sind genau die PCP's und eine nicht-triviale F_p^*-Projektion gibt es nur, wenn der Raum Dimension 2 hat.

3. C(K)

Es gibt nicht-triviale F-Projektionen nur für $F=F_\infty$ oder $=F_1$. Die ∞-Projektionen entsprechen den charakteristischen Funktionen von clopenen Teilmengen (siehe [A-E]) und eine n-t. 1-Projektion gibt es nur, wenn K zweipunktig ist.

4. Lindenstraußräume

Wie für C(K). Die genaue Beschreibung der ∞-Projektionen ist im allgemeinen nicht möglich.

==========

4 Literatur

[A-E] E.M.Alfsen und E.Effros Structure in real Banach spaces Parts I and II Ann. of Math. 96(1972) 98-173

[B] F.Bohnenblust An axiomatic characterisation of L^p-spaces Duke Math. J. 6 (1940) 627-640

[Beh] E.Behrends L^p-Struktur in Banachräumen Arbeitspapier FU Berlin 1974

[Bi] K.Bichteler Integration Theory Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York 1973

[C-S] H.B.Cohen und F.E.Sullivan Projecting onto cycles in smooth reflexive Banach spaces Pacific J. Math. 34(1970) 355-364

[C_1] F.Cunningham Jr. L^1-structure in Banach spaces Thesis, Harvard University 1953

[C_2] ———— L-structure in L-spaces Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960) 274-299

[C_3] ———— M-structure in Banach spaces Proc. Cambridge Phil. Soc. 63 (1967) 613-629

[CER] ———— und E.Effros und N.M.Roy M-structure in dual Banach spaces Israel J. Math. 14 (1973) 304-308

[G] A.Grothendieck Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces L^1 Canad. J. Math. 7 (1955) 552-561

[Si] R.Sikorski Boolean Algebras Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York 1964 (2. Auflage).

[Su] F.E.Sullivan Structure of real L^p-spaces J. Math. Anal.and Applications 32 (1970) 621-629

Lebenslauf

Ich bin am 27. Januar 1950 in Gorseinon, Wales geboren.

Bis 1961 besuchte ich die 'Kingsbridge Primary School'(=Grundschule) und von 1961 bis 1968 die 'Gowerton Boys' Grammar School'(=Gymnasium). Auf dem Gymnasium wurde ich zum Studium an der Universität Cambridge vorgeschlagen und, nachdem ich die Aufnahmeprüfungen bestanden hatte, nahm ich im Herbst 1968 mein Studium am Trinity College auf. Ich blieb dort bis Sommer 1972. Die Teile IA,IB und II des 'Cambridge Mathematical Tripos' bestand ich mit höchster Auszeichnung (1^{st} Class Honours) und am 25. Juni 1971 wurde mir der Titel 'Bachelor of Arts' verliehen. Im Jahre 1972 bestand ich die Prüfungen des III. Teiles des 'Tripos', wieder mit Auszeichnung. Während der ersten drei Jahre wurde ich im Einzelunterricht, u.a., von den Herren Dr. Baker, Dr. Moffatt, Dr. Marr und Prof. Swinnerton-Dyer unterrichtet. Im letzten Jahr habe ich als Teil der Prüfung eine Arbeit über 'Stark reguläre Graphen' geschrieben, die von Herrn Dr. Bela Bollobas begutachtet wurde.

Im Herbst 1972 kam ich als Stipendiat der Stiftung Luftbrückendank nach Berlin, wo ich bei Herrn Prof. Dr. Behrends meine Dissertation geschrieben habe.

Im Dezember 1974 wird mir der Titel 'Master of Arts' von der Universität Cambridge verliehen werden.

B. Ladewig-Dissertationsdruck - 1 Berlin 12-Pestalozzistraße 106
Tel.: 3 12 88 85 - 3 13 81 98